

〈一般研究課題〉 家庭内排熱の有効利用に関する研究  
助成研究者 大同工業大学 佐藤 義久



## 家庭内排熱の有効利用に関する研究

佐藤 義久  
(大同工業大学)

## Study on the Output power characteristics of Shape Memory Alloy Engine

Yoshihisa Sato  
(Daido Institute of Technology)

### Abstract

It is necessary to use the low temperature thermal energy around 100 degrees C from a viewpoint of global warming prevention. Even if a shape memory alloy is bent in normal temperature, when it is heated, it has the character which returns to the original straight form. Using this character of a shape memory alloy, unused thermal energy will be able to transform into rotation energy, and finally it can change into electric energy. The research was done from both sides of theory and an experiment about the rotation mechanism of the SMA engine, and its output characteristics. The theoretical formula for calculating predicts the rotation speed( $\omega$ ) and the output power(P) of the SMA engine, was drawn from the size of a SMA belt, Young's modulus, and the radiuses of high- temperature and low-temperature rings. In addition, we conducted the experiment about rotation speed of SMA engine, and verified the validity of this theory indirectly.

### 1. はじめに

地球環境保全の観点より、未利用熱エネルギーの有効活用を図っていく必要がある。形状記憶合金(SMA: Shape Memory Alloy)は変形させても高温に加熱すると元の形状に戻る性質がある。SMAのこの性質を利用し、従来、大気中に捨てられていた家庭内排熱および海・河川などに捨てられていた蒸気タービン排熱を回収する新発電システムの開発を念頭に、SMAエンジンの回転メカニズム、

出力特性について研究する。リング状にしたSMAベルトを2つの車輪に掛けたプーリ型熱エンジンに関しては既にW.S.Ginellおよび戸伏等によって基礎的な研究がなされている<sup>(1),(2),(3)</sup>。著者等は平角線SMAベルトを用いたプーリ型SMAエンジンの回転数、出力を数式で表すことを試みた<sup>(4)</sup>。本研究は、これらの研究をさらに発展させ、SMAベルトの形状・寸法、ヤング率、SMAエンジンの大きさ（高温輪の半径および低温輪の半径）のみからSMAエンジンの回転数 $n$  [rpm]、出力 $P$  [W]を予測する理論式を導出し、その妥当性を実験により検証することを目的としている。高出力化に適した直径2mmの丸線SMAベルトを用いた実験を、提唱した理論の妥当性を検証した。尚、形状記憶合金熱エンジンはガス給湯器、火力発電所、工場排熱、など数10℃～数100℃の温度範囲の排熱に適用可能であるが、一般的なTi-Ni成分の形状記憶合金の変態温度が100℃程度であること、200℃以上の温度領域では熱電素子、また400℃以上では通常の蒸気タービン発電も可能であることより、本研究では対象とする温度領域を100℃程度以下の未利用熱エネルギーとした。

## 2. 研究の背景

従来、SMAエンジンの回転力はSMAベルトの左右の張力差により発生すると考えられていたが、我々はSMAエンジンの動きを詳細に観察した結果、SMAベルトが振動しながら回転する“振動モード”も存在することを発見した<sup>(4)</sup>。すなわち、SMAベルトは点1 ( $t_1$ ) で高温輪に接触し熱を受けながら回転し点2 ( $t_2$ ) で高温になり、元のまっすぐな形状に戻ろうとするときの曲げモーメントが作用反作用の原理により、高温輪を蹴り、回転モーメント $M_h$ を発生させる。SMAベルトは風冷および低温輪で冷却され点3 ( $t_3$ )、点4 ( $t_4$ ) で冷え切る。

著者等の従来の研究<sup>(4)</sup>では図1および図2に示す点3、すなわちSMAベルトが低温輪に接する点の温度 $t_3$ が自然冷却のため56～62℃であり、図2に示すとおり、SMAベルトのヤング率を $E_2$  (40GPa)と仮定するのはやや無理があった。そこで低温輪を強制冷却し、 $t_2 > t_1$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ の条件を満たすようにした。図2から明らかなように本研究の実験条件では点2 ( $t_2=89^\circ\text{C}$ ) のにおけるSMAベルトのヤング率は $E_1$  (80GPa) であり $t_1$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ では $E_2$  (40GPa) であるとみなせるので、SMAベルトのヤング

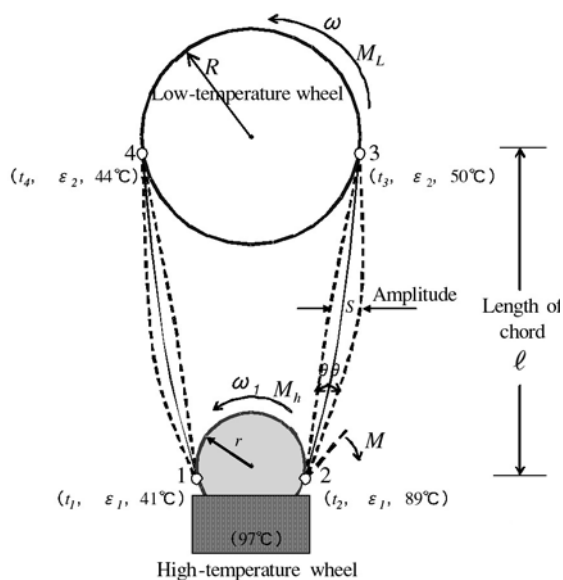


図1 SMAエンジンの基本構成

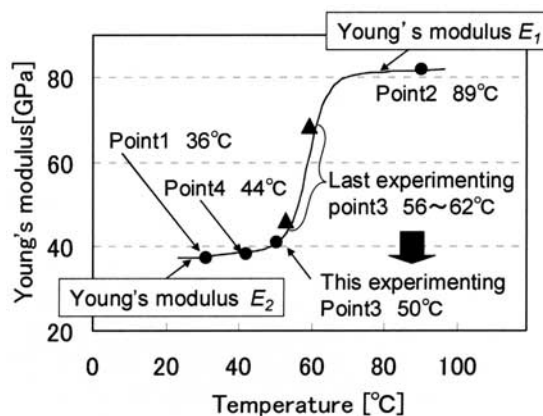


図2 SMAベルトのヤング率—温度の関係

率が点2 ( $t_2$ ) と点1 ( $t_1$ ), 点3 ( $t_3$ ), 点4 ( $t_4$ ) でステップ的に変化するものとモデル化し, 回転数および出力を予測する理論式を求める。回転力の源となるひずみエネルギーについてはSMAベルトが高温輪, 低温輪に接する点2, 点3, 点4, 点1に於いて曲げ, あるいは伸ばされるひずみエネルギーをSMAエンジンからみたエネルギーの放出・吸収という観点から見直し (表1参照), このエネルギーの単位時間当たりの差が高温輪・低温輪の回転エネルギーの増加分と出力および損失に等しいとして, 回転角速度  $\omega$  に関する微分方程式を立て, それを解くことにより, 回転角速度  $\omega$  を理論的に導出する。実験に於いては十分空冷し (点3の温度を  $50^\circ\text{C}$  以下), モデル化した新理論の妥当性を実験的に検証する。

### 3. SMAエンジンの出力, 回転数の理論的予測

#### 3.1 SMAベルトのエネルギーの放出と吸収

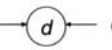
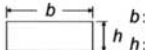
SMAベルトは点2, 点3, 点4, 点1の各点に於いてひずみエネルギーを放出あるいは吸収するが, これをSMAエンジンの回転エネルギーの観点から整理すると以下の通りとなる。

まず点2でSMAベルトはまっすぐになり, ひずみエネルギーを放出する。これが, 回転エネルギー源となる。次に点3ではSMAベルトは低温輪で曲げられ, ひずみエネルギーを貯えるが, SMAエンジンの回転エネルギーの観点からは, エネルギーの吸収となる。点4でSMAベルトは再びまっすぐに伸ばされ, ひずみエネルギーを解放するが, SMAエンジンの出力的には負の仕事になる。つまり, 回転エネルギー的にはエネルギーの吸収となる。最後に点1でSMAベルトはお湯につかり始めるが, 曲げられるとき, ヤング率はまだ  $E_2$  であり, SMAベルトにひずみエネルギーを貯えるが, SMAエンジンの回転エネルギー的にはエネルギーの吸収となる。

#### 3.2 ひずみエネルギー

各点でSMAベルトが吸収, 放出するひずみエネルギーはSMAベルトの単位体積あたりのひずみエネルギーにSMAベルトが単位時間あたり移動する体積を掛け合わせたものとして求めることができる。

表1 SMAベルトのひずみエネルギー

Point	Young's modulus /temperature	strain	Strain energy	
			 $d$ : diameter	 $b$ : width $h$ : thickness
2	$E_1/89^\circ\text{C}$	$\varepsilon_1$	$W_2 = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot r \omega_1 = \frac{E_1 \pi d^4}{32r^2} \cdot r \omega_1$	$W_2 = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_1^2 \cdot bh \cdot r \omega_1 = \frac{E_1 bh^3}{8r^2} \cdot r \omega_1$
3	$E_2/50^\circ\text{C}$	$\varepsilon_2$	$W_3 = \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_2^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot R \omega = \frac{E_2 \pi d^4}{32R^2} \cdot R \omega$	$W_3 = \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_2^2 \cdot bh \cdot R \omega = \frac{E_2 bh^3}{8R^2} \cdot R \omega$
4	$E_2/44^\circ\text{C}$	$\varepsilon_2$	$W_4 = \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_2^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot R \omega = \frac{E_2 \pi d^4}{32R^2} \cdot R \omega$	$W_4 = \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_2^2 \cdot bh \cdot R \omega = \frac{E_2 bh^3}{8R^2} \cdot R \omega$
1	$E_2/36^\circ\text{C}$	$\varepsilon_1$	$W_1 = \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_1^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot r \omega_1 = \frac{E_2 \pi d^4}{32r^2} \cdot r \omega_1$	$W_1 = \frac{1}{2} E_2 \varepsilon_1^2 \cdot bh \cdot r \omega_1 = \frac{E_2 bh^3}{8r^2} \cdot r \omega_1$

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} E \varepsilon^2}_{\text{単位体積あたりのひずみエネルギー}} \cdot \underbrace{\frac{\pi d}{4}}_{\text{断面積}} \cdot \underbrace{r \omega_1}_{\text{速度}} (r \omega_1 = R \omega) \dots\dots\dots (1)$$

点2における直径dの丸線SMAベルトのひずみ  $\varepsilon_1$  は  $\varepsilon_1 = d/2r$  であるから

$$W_2 = \frac{1}{2} E_1 \left( \frac{d}{2r} \right)^2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} r \omega_1 = \frac{\pi d^4 E_1}{32 r^2} \cdot r \omega_1 \dots\dots\dots (2)$$

となる。同様に点3, 点4, 点1のひずみエネルギー  $W_3, W_4, W_1$  は表1の通りとなる。表1には幅  $b$ , 厚さ  $h$  の平角線ベルトの場合も合わせて示した。

但し, 丸線  $\varepsilon_1 = \frac{d}{2r}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{d}{2R}$ , 平角線  $\varepsilon_1 = \frac{h}{2r}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{h}{2R}$  である。

### 3.3 理論出力式の見直し

我々が発見したSMAベルトの振動に起因する回転メカニズムに於いては, SMAベルトの曲げモーメントの法線成分が回転力になっているのではないかと考え, SMAベルトの振幅  $S$  と SMAベルトの長さ  $\ell$  (図3参照) を含む新回転メカニズムを考えた。SMAベルトは点1で高温輪に接触し熱を受けながら回転し, 点2で高温(SMAベルトの変態温度)になり元のまっすぐな形状に戻ろうとする。このときの曲げモーメントの法線成分が作用反作用の原理により高温輪を蹴り, 回転モーメント  $M_h$  を発生させる。SMAベルトは点2で元のまっすぐな形状に戻ろうとするが, ループ状になっているため低温輪側に引き戻される。これを繰り返し, 振動しながら回転するのではないかと考えた。

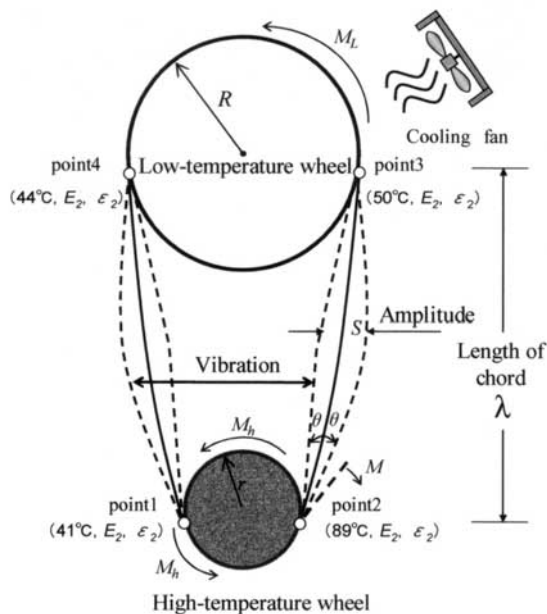


図3 トルク発生メカニズム

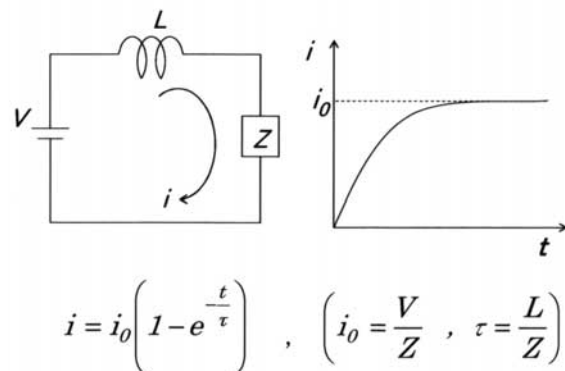


図4 L-Z回路の過渡解

点2におけるSMAの曲げモーメントMは材料力学より

$$M = \frac{E_1 I}{r} \dots\dots\dots (3)$$

但し、 $E_1$ はヤング率、 $I$ はSMAベルトの断面2次モーメントである。この曲げモーメントの法線方向成分が回転モーメントとなるので、回転モーメント $M_h$ は

$$M_h = M \cdot \sin\theta \dots\dots\dots (4)$$

振幅 $S$ は弦長 $\ell$ に比べて十分小さいので、

$$\sin\theta \doteq (S/2) / (\ell/2) \doteq S/\ell \dots\dots\dots (5)$$

したがって

$$M_h = M \cdot \sin\theta \doteq \frac{E_1 I}{r} \cdot \frac{S}{\ell} \dots\dots\dots (6)$$

一方、高温輪、低温輪の回転角速度を $\omega_1, \omega$ とすると $r\omega_1 = R\omega$ であり、出力 $P$ は回転モーメント(回転トルク)と回転角速度の積として求められるので

$$P = \omega M_h = \omega_1 \cdot \frac{E_1 I}{r} \cdot \frac{S}{\ell} = \omega \frac{R E_1 I}{r^2} \cdot \frac{S}{\ell} \dots\dots\dots (7)$$

以上よりSMAエンジンの理論出力 $P$ は下式のとおりとなる。

丸線SMAベルトの出力  $P = \omega \cdot \frac{\pi d^4 R E_1}{64 r^2} \cdot \frac{S}{\ell} \dots\dots\dots (8)$

平角線SMAベルトの出力  $P = \omega \cdot \frac{b h^3 R E_1}{12 r^2} \cdot \frac{S}{\ell} \dots\dots\dots (9)$

但し、SMAベルトの断面2次モーメント $I$ は丸線の場合： $I = \pi d^4 / 64$  ( $d$ :直径)、平角線の場合： $I = b h^3 / 12$  ( $b$ :幅、 $h$ :厚さ) である。

### 3.4 回転メカニズムに関する微分方程式

エネルギーバランスからSMAエンジンの回転数に関する微分方程式を立て、理論回転数を求める。発電機の出力端を開放して無負荷状態とし、また無負荷損を無視すると、時間 $\Delta t$ の間にSMAエンジンが得るエネルギーは丸線SMAベルトの場合、 $(W_2 - W_3 - W_4 - W_1) \Delta t$ となり、その値

は表1より、 $\frac{\pi d^4}{32} \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right) R \omega \cdot \Delta t$  となる。

SMAベルトのひずみエネルギーの差=高温輪・低温輪の運動エネルギーの増加+ (出力+損失) であるので、高温輪・低温輪の運動エネルギーの増加を求めると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} J_1 (\omega_1 + \Delta\omega_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega + \Delta\omega)^2 - \left\{ \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (\omega + \Delta\omega)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\omega + \Delta\omega)^2 - \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \omega^2 - \frac{1}{2} J_2 \omega^2 = \frac{1}{2} J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 (2\omega \cdot \Delta\omega + \Delta\omega^2) + \frac{1}{2} J_2 (2\omega \cdot \Delta\omega + \Delta\omega^2) \end{aligned}$$

出力+損失を回転数の2乗に比例すると考え、 $k\omega^2\Delta t$ とし、2次以上の高次の項を無視すると

$$\frac{\pi d^4 R}{32} \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right) \omega \Delta t = \left\{ J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2 \right\} \omega \cdot \Delta \omega + k \omega^2 \Delta t$$

両辺を  $\omega \Delta t$  で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$ 、 $\Delta \omega \rightarrow 0$  の極限をとると、回転角速度に関する以下の微分方程式が得られる。

$$\frac{\pi d^4 R}{32} \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right) = \left\{ J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2 \right\} \frac{d\dot{u}}{dt} + k\dot{u} \dots\dots\dots (10)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$V \qquad \qquad = \qquad L \frac{di}{dt} \qquad + Zi$$

式 (10) の微分方程式は、よく知られている L-Z 回路に電圧を印加した場合の過渡方程式と同じ形をしており、諸量の対応関係は以下のとおりである。

$$\frac{\pi d^4 R}{32} \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right) \Leftrightarrow V$$

$$J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2 \Leftrightarrow L$$

$$\omega \Leftrightarrow i$$

$$k \Leftrightarrow Z$$

$$i_0 = \frac{V}{Z} \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi d^4 R \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right)}{k} = \frac{\pi d^4 R \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right)}{J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2} \cdot \tau \dots (11)$$

$$\tau = \frac{L}{Z} \Leftrightarrow \tau = \frac{J_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 + J_2}{k}$$

式 (11) において時定数  $\tau$  は SMA ベルトがお湯につかり、温まる時間とみなせる筈であるから、 $\tau = \pi r \div r \omega_1 (= R \omega)$  と見なすことができるので、式 (11) に  $\tau = \pi r / R \omega$  を代入すると、 $\omega_0$  は以下の通りとなる。

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2 d^4 r^3 \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right)}{32 (J_1 R^2 + J_2 r^2)}$$

以上求めた  $\omega_0$  は無負荷時の回転角速度であるから、これを  $\omega_0 = \omega_{\max}$  とおく。

$$\omega_{\max} = \left( \frac{\pi^2 d^4 r^3 \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right)}{32 (J_1 R^2 + J_2 r^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (12)$$

同様にして、平角線 SMA ベルトの場合は以下のとおりとなる。

$$\omega_{max} = \left( \frac{\pi b h^3 r^3 \left( \frac{E_1 - E_2}{r^2} - \frac{2E_2}{R^2} \right)}{8(J_1 R^2 + J_2 r^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (13)$$

### 3.5 SMAエンジンの回転数，出力の予測

提唱した理論より，SMAエンジンの出力P，回転角速度 $\omega$ を式(8)，式(12)を用いて求めると図5，図6のとおりとなる。尚，図5には参考のため平角線の回転角速度も合わせて示した。

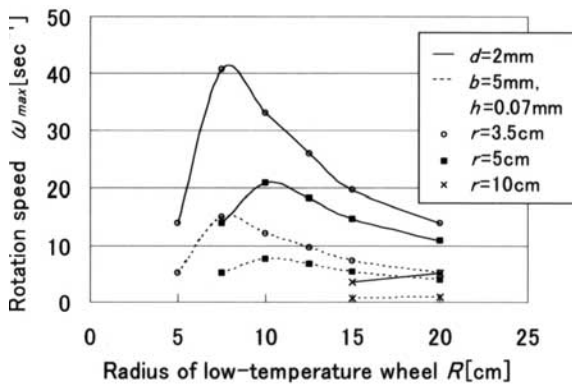


図5 理論回転数

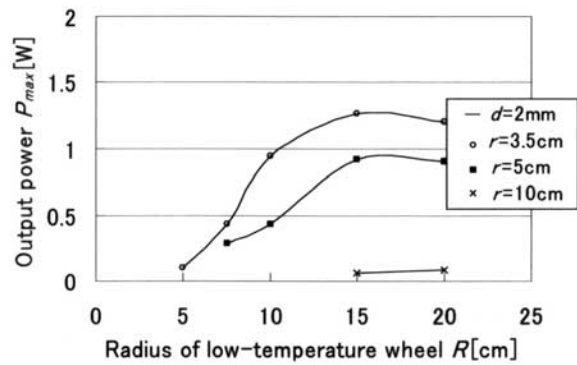


図6 理論出力

## 4. 実験

SMAエンジンの出力P，回転角速度 $\omega_{max}$ を予測する理論式を導出したが，その妥当性を検証するために，回転角速度 $\omega_{max}$ を測定し，間接的ではあるが，導出した理論の妥当性を実験的に検証する。

### 4.1 実験装置

丸線SMAベルトを用いた回転数測定用実験装置の概要を図7に示す。

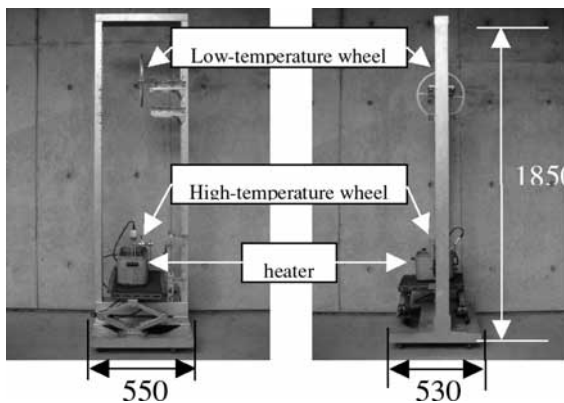


図7 実験装置概観

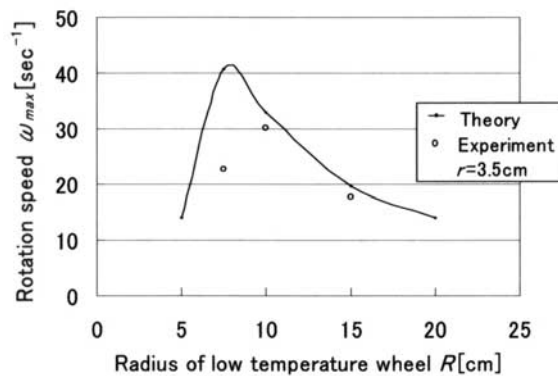


図8 回転数の理論値と実験値の比較 (r=3.5cm)

回転数は非接触の光学式回転数計（ライン精機株式会社，TM-5010）を用いた。

## 4.2 実験結果と考察

高温輪の半径 $r$ を $r=3.5\text{cm}$ ,  $5\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$ とし、低温輪の半径 $R$ を $R=7.5\text{cm}$ ,  $10\text{cm}$ ,  $15\text{cm}$ として9種類の車輪の組み合わせについて回転数測定を行った。実験結果は、図8、図9、図10に示すとおり、いずれの組み合わせにおいても低温輪の半径が $10\text{cm}$ のとき最大回転数が得られた。高温輪の半径が $r=3.5\text{cm}$ の場合、図8に示すとおり、理論と実験は非常によく一致し、予想どおり最も高い回転数が得られた。高温輪の半径が $r=5\text{cm}$ の場合、図9に示すとおり、理論と実験の傾向は非常によく一致しているが実験値の方が理論値より20~70%高い回転数が得られた。さらに図10に示すように、高温輪の半径が $r=10\text{cm}$ の場合は実験値の方が理論値の5倍以上高く、本理論には適用可能な範囲があり、高温輪の半径 $r$ が小さく高回転・高出力の領域では理論と実験が非常によく一致しているが高温輪の半径 $r$ が大きくなるにつれ、理論と実験の乖離が大きくなっていく傾向にある。しかし、SMAエンジンの高出力化、コンパクト化に必要な高温輪の半径が小さい領域で理論と実験は非常によく一致するので本理論の妥当性・有効性は確認できた。

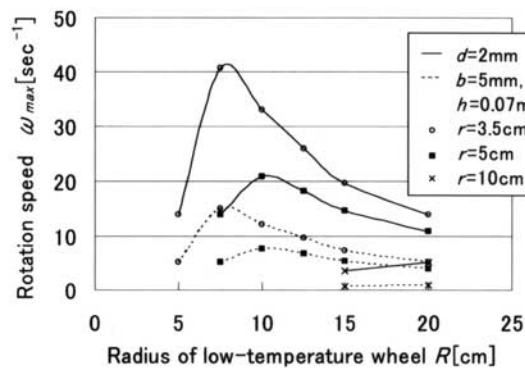


図9 回転数の理論値と実験値の比較 ( $r=5\text{cm}$ )

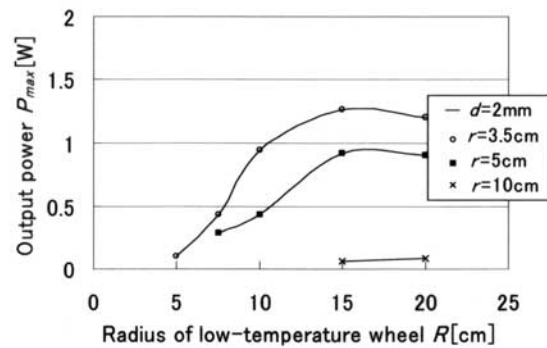


図10 回転数の理論値と実験値の比較 ( $r=10\text{cm}$ )

## 5. まとめ

形状記憶合金熱エンジンを用いた新発電システムの開発、設計製作に向け、形状記憶合金熱エンジンの回転メカニズムを見直し、SMAエンジンの回転角速度、出力を予測する理論式を導出した。また、導出した理論式の妥当性を検証するための実験を行い、回転角速度について、理論値と実験値の比較検討を行い、間接的ではあるが理論の妥当性を検証した。今後、回転速度 $\omega$ とトルク $T$ を同時測定し、SMAエンジンの出力 $P (= \omega T)$ を直接測定し、理論値と実験値の比較検討を行い、理論の妥当性をさらに厳密に検証する予定である。

## 謝 辞

本研究は財団法人 日比科学技術振興財団の研究助成金を受けて行なわれたものであり、ここに記して同財団に感謝の意を表します。



## 参考文献

- (1) W.S.Ginell, J.L.McNichols,Jr., and J.S.Cory, Nitinol Heat Engines for low-grade thermal energy conversion, Mech.Eng.Vol.101, No.5, (1979), 26-33
- (2) H.Tobushi, J.R.Cahoon, Mechanical Analysis of a Solar-Powered Solid State Engine, Transactions of the Canadian Society of Mechanical Engineers, Vol.9, No.3, (1985), 137-141
- (3) H.Tobushi, K.Kimura, H.Iwanaga, and J.R.Cahoon, Basic Research on the Output Power Characteristic of Shape Memory Alloy Heat Engine (2nd Report), JSME, SeriesA, Vol.55, No.509, (1989), 165-169
- (4) Y.Sato,N.Yoshida,Y.Tanabe and H.Fujita, Study on the Output Power Characteristic of a Shape Memory Alloy Engine ,JSME, SeriesB, Vol.72, No.717, (2006-5), 227-233